

И. А. Иванишко, В. Г. Кротов

Минск, *ivanishko@bsu.by*, *krotov@bsu.by*

КОМПАКТНОСТЬ СОБОЛЕВСКИХ ВЛОЖЕНИЙ НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ

Пусть (X, d) — ограниченное метрическое пространство с регулярной борелевской мерой μ , связанной с d условием удвоения порядка $\gamma > 0$: $\mu B(x, s) \leq cs^\gamma r^{-\gamma} \mu B(x, r)$, $x \in X$, $0 < r \leq s$. Здесь $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ — шар с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$.

Пусть Ω — класс возрастающих функций $\eta : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$, для которых $\eta(+0) = 0$ и $\eta(r)r^{-\alpha}$ убывает при некотором $\alpha > 0$. Для $\eta \in \Omega$ определим максимальный оператор

$$\mathcal{N}_\eta f(x) = \sup_{B(y, r) \ni x} \frac{1}{\eta(r)} \cdot \frac{1}{\mu(B(y, r))} \int_{B(y, r)} |f(y) - f(x)| d\mu(y)$$

и рассмотрим классы Кальдерона – Коляды

$$C_\eta^p(X) = \{f \in L^p(X) : \|f\|_{C_\eta^p} = \|f\|_p + \|\mathcal{N}_\eta f\|_p < \infty\}.$$

В [1] были доказаны следующие теоремы вложения соболевского типа (для $X = [0, 1]^n$ ранее их доказал В. И. Коляда [2]): пусть $1 < p < q < \infty$,

1) если $\sigma \in \Omega$ и

$$\eta(r) = \sigma(r)r^{\gamma(1/p-1/q)}, \quad (1)$$

то $C_\eta^p(X) \subset C_\sigma^q(X)$,

2) если $\eta(r) = r^{\gamma(1/p-1/q)}$, то $C_\eta^p(X) \subset L^q$.

Здесь мы приводим условия для компактности этих вложений.

Теорема 1. Пусть $1 < p < q < \infty$, $\sigma \in \Omega$, η определяется равенством (1). Тогда, если $\sigma_0 \in \Omega$ удовлетворяет условию

$$\lim_{r \rightarrow +0} \sigma(r)/\sigma_0(r) = 0,$$

то вложение $C_\eta^p(X) \subset C_{\sigma_0}^q(X)$ компактно.

Теорема 2. Пусть $1 < p < q < \infty$. Тогда, если $\eta \in \Omega$ удовлетворяет условию

$$\lim_{r \rightarrow +0} \eta(r)r^{\gamma(1/q-1/p)} = 0,$$

то вложение $C_\eta^p(X) \subset L^q(X)$ компактно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванишко И. А. Оценки максимальных функций Кальдерона – Коляды на пространствах однородного типа // Труды Ин-та матем. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 12. – № 1. – С. 64–67.

2. Kolyada V. I. *Estimates of maximal functions measuring local smoothness* // Analysis Math. – 1999. – V. 35. – No 1. – P. 277–300.

В. И. Иванов, Liu Yongping

Тула, Beijing, ivaleryi@mail.ru, ypliu@bnu.edu.cn

ОБ ОЦЕНКЕ СНИЗУ КОНСТАНТ ДЖЕКСОНА В ПРОСТРАНСТВАХ L_p , $1 \leq p < 2$, С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВЕСОМ ЯКОВИ

Пусть $\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$ — одномерный тор, $\alpha \geq -1/2$, $d\nu_\alpha(x) = |\sin x|^{2\alpha+1} dx$, $1 \leq p \leq 2$, $L_{p,\alpha}(\mathbb{T})$ — пространство 2π -периодических измеримых по Лебегу функций с конечной нормой

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p d\nu_\alpha(x) \right)^{1/p} < \infty,$$